1 Πολυώνυμα και συσχετικός χώρος

Ορισμός 3.1 Ένα μονώνυμο N στις μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_n$ είναι ένα γινόμενο της μορφής $x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n}$, όπου όλοι οι εκθέτες είναι φυσικοί αριθμοί. Ο βαθμός του μονωνύμου είναι

$$degN = m_1 + m_2 + ... + m_n.$$

Ορισμός 3.2 Ένα πολυώνυμο f στις μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_n$ με συντελεστές από ένα σώμα K είναι ένας πεπερασμένος γραμμικός συνδιασμός μονωνύμων με συντελεστές από το σώμα K, δηλ.

$$f = \sum a(m_1 m_2 ... m_k) x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_k}$$

Ορισμός 3.3 Το σύνολο όλων των πολυωνύμων στις μεταβλητές $x_1, x_2, ..., x_n$ με συντελεστές από ένα σώμα K συμβολίζεται με $K[x_1, x_2, ..., x_n]$.

Ο $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο και ονομάζεται δακτύλιος πολυωνύμων.

Ορισμός 3.4 Το $a(m_1 m_2 ... m_k)$ ονομάζεται συντελεστής του μονωνύμου $x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_k}$. Αν $a(m_1 m_2 ... m_k) \neq 0$ τότε το $a(m_1 m_2 ... m_k) x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_k}$ λέγεται όρος του πολυωνύμου. Κάθε πολυώνυμο έχει πεπερασμένο πλήθος όρων. Βαθμός του όρου

$$a(m_1 m_2 ... m_k) x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_k}$$

λέγεται ο βαθμός του μονωνύμου. Τον μέγιστο βαθμό όρου τον ονομάζουμε βαθμό του πολυωνύμου.

Ορισμός 3.5 Ομογενές λέγεται ένα πολυώνυμο, αν όλοι οι όροι του έχουν τον ίδιο βαθμό.

Ορισμός 3.6 Το $M(f)$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο που αποτελείται από τους μεγιστοβάθμιους όρους του f.

Ορισμός 3.7 Το $E(f)$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο που αποτελείται από τους ελάχιστοβάθμιους όρους του f.

Παρατήρηση 3.8 Αν το πολυώνυμο f είναι ομογενές τότε $f = M(f) = E(f)$.

Ορισμός 3.9 Ο n-διάστατος Καρτεσιανός χώρος πάνω από το σώμα K είναι το σύνολο όλων των διατεταγμένων n-άδων $(a_1, a_2, ..., a_n)$ όπου τα $a_i \in K$, και συμβολίζεται με K^n. Κάθε στοιχείο του ονομάζεται σημείο του K^n.

Ορισμός 3.10 Ένα σημείο $(a_1, a_2, ..., a_n)$ λέγεται μηδενικό του $f \in K[x_1, x_2, ..., x_n]$ αν $f(a_1, a_2, ..., a_n) = 0$. Το σύνολο των μηδενικών του f συμβολίζεται με $V(f)$.

4 Προβολικός χώρος

Ορισμός 4.1 Το προβολικό επίπεδο P_k^2 είναι το σύνολο όλων των ευθειών του K^3 που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Οι ευθείες αυτές λέγονται σημεία του προβολικού επιπέδου και συμβολίζονται με (x_1, x_2, x_3), όπου (x_1, x_2, x_3) είναι τυχαίο σημείο της ευθείας διάφορο από το $(0, 0, 0)$.

Δηλαδή, δύο διαφορετικές παραστάσεις (x_1, x_2, x_3) και (y_1, y_2, y_3) παριστάνουν το ίδιο σημείο αν και μόνο αν υπάρχει $t \in K$ τέτοιο ώστε $x_1 = ty_1, x_2 = ty_2, x_3 = ty_3$. Η τριάδα $(0, 0, 0)$ δεν παριστάνει σημείο του προβολικού επιπέδου.

Όμοια μπορούμε να ορίσουμε και τον προβολικό n-διάστατο χώρο.

Ορισμός 4.2 Ο προβολικός n-διάστατος χώρος P_K^n είναι το σύνολο όλων των ευθειών του K^{n+1} που διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Οι ευθείες αυτές λέγονται σημεία του προβολικού χώρου και συμβολίζονται με $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$, όπου $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$είναι ένα τυχαίο σημείο της ευθείας διάφορο από το $(0, 0, ..., 0)$.

Δηλαδή, δύο διαφορετικές παραστάσεις $(x_1, x_2, ..., x_{n+1})$ και $(y_1, y_2, ..., y_{n+1})$ παριστάνουν το ίδιο σημείο αν και μόνο αν υπάρχει $t \in K$ τέτοιο ώστε $x_1 = ty_1, x_2 = ty_2, ..., x_{n+1} = ty_{n+1}$.

Το **σφαιρικό μοντέλο** του πραγματικού προβολικού επιπέδου P_R^2 είναι το σύνολο των σημείων της σφαίρας $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ του R^3, όπου τα αντιδιαμετρικά σημεία της ταυτίζονται.

Το **μοντέλο του δίσκου** του πραγματικού προβολικού επιπέδου είναι η προβολή ενός ημισφαιρίου της σφαίρας $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ στο επίπεδο του μέγιστου κύκλου της, μαζί με τον μέγιστο κύκλο. Κάθε σημείο του εσωτερικού του δίσκου αντιστοιχεί σε ένα σημείο του προβολικού επιπέδου, ενώ ζεύγη αντιδιαμετρικών σημείων του μέγιστου κύκλου αντιστοιχούν σε ένα σημείο του προβολικού επιπέδου.

Μια καμπύλη στο προβολικό επίπεδο P_K^2 είναι ένας κώνος στο K^3 με κορυφή την αρχή των αξόνων και περιγράφεται από ένα ομογενές πολυώνυμο στις μεταβλητές X, Y, Z. Οι προβολικές ευθείες αντιστοιχούν σε επίπεδα του K^3 που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και άρα είναι της μορφής $aX + bY + cZ = 0$. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία (a_1,b_1,c_1) και (a_2,b_2,c_2) έχει εξίσωση

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} X + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} Y + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} Z = 0.$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι γραμμική και έχει σαν λύσεις τις (a_1,b_1,c_1) και (a_2,b_2,c_2). Αφού

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} a_1 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} b_1 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

και όμοια για το (a_2,b_2,c_2).
Η επόμενη παρατήρηση δίνει μια από τις ουσιαστικές διαφορές μεταξύ του Καρτεσιανού επιπέδου και του προβολικού. Στο προβολικό επίπεδο δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες. Στο προβολικό επίπεδο, δύο διαφορετικές ευθείες πάντα τέμνονται σε ένα σημείο. Οι ευθείες $a_1X+b_1Y+c_1Z=0$ και $a_2X+b_2Y+c_2Z=0$ τέμνονται στο σημείο

$$(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}).$$

(το σημείο είναι διάφορο του $(0,0,0)$ αφού οι δύο ευθείες είναι διαφορετικές). Είναι πολύ εύκολο να ελέγξουμε ότι το παραπάνω σημείο είναι σημείο και των δύο ευθειών αφού

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} a_1 + \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} b_1 + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

και όμοια για την $a_2X+b_2Y+c_2Z=0$.

Τα σημεία του προβολικού επιπέδου χωρίζονται σε δύο υποσύνολα με τον παρακάτων τρόπο: σε αυτά που η τελευταία τους συντεταγμένη είναι διάφορη του μηδενός και σε αυτά που έχουν την τελευταία συντεταγμένη μηδέν. Αν η τελευταία συντεταγμένη είναι διάφορη του μηδενός τότε μπορούμε να διαιρέσουμε με αυτήν και τις τρεις συντεταγμένες και να πάρουμε σήμειο της μορφής $(a,b,1)$. Τέτοια σημεία βρίσκονται στο επίπεδο του K^3 με εξίσωση $Z=1$. Υπάρχει μια *ένα προς ένα και επί* αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του προβολικού επιπέδου με τελευταία συντεταγμένη διάφορη του μηδενός και των σημείων του επιπέδου $Z=1$. Ή διαφορετικά, υπάρχει μια *ένα προς ένα και επί* αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιπέδου K^2 και των σημείων του προβολικού επιπέδου με τελευταία συντεταγμένη διάφορη του μηδενός. Η αντιστοιχία δίνεται: $(a,b) \longleftrightarrow (a,b,1)$.

Τα προβολικά σημεία με τελευταία συντεταγμένη μηδέν βρίσκονται όλα στην ευθεία του προβολικού επιπέδου με εξίσωση $Z=0$. Κάθε άλλη ευθεία του προβολικού επιπέδου $aX+bY+cZ=0$ έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την ευθεία $Z=0$, το σημείο $(b,-a,0)$.
Συνοψίζοντας, το προβολικό επίπεδο αποτελείται από τα σημεία που έχουν τελευταία

συντεταγμένη διάφορη του μηδενός, και βρίσκονται σε *ένα προς ένα και επί* αντιστοιχία με τα σημεία του συσχετικού επιπέδου K^2, και από τα σημεία που έχουν τελευταία συντεταγμένη μηδέν και τα ονομάζουμε **σημεία στο άπειρο**. Υπάρχει ένα σημείο στο άπειρο για κάθε διεύθυνση των ευθειών του K^2.

Παρατήρηση 3.3 Ο παραπάνω διαχωρισμός των σημείων του προβολικού επιπέδου σε δύο υποσύνολα με βάση το $Z \neq 0$ και $Z = 0$ είναι αυθαίρετος. Θα μπορούσε ο διαχωρισμός να γίνει με βάση το $X \neq 0$ και $X = 0$ ή $Y \neq 0$ και $Y = 0$ ή ακόμη και με οποιαδήποτε άλλη προβολική ευθεία, δηλαδή με $aX+bY+cZ \neq 0$ και $aX+bY+cZ = 0$, ανάλογα με το ποιά ευθεία έχει επιλεγεί για ευθεία στο άπειρο.

Η διαδικασία για να βρούμε την εξίσωση μιας καμπύλης $f(x, y) = 0$ στο προβολικό επίπεδο λέγεται **ομογενοποίηση** και σε αυτή χρησιμοποιούμε το Z για να κάνουμε το πολυώνυμο $f(x, y)$ ομογενές. Αν $f(x, y)$ είναι βαθμού d, με την ομογενοποιήση παίρνουμε ένα ομογενές πολυώνυμο $F(X, Y, Z)$ βαθμού d ως εξής: για τον όρο $ax^n y^m$ του $f(x, y)$ το $F(X, Y, Z)$ έχει τον όρο $aX^n Y^m Z^{d-n-m}$. Για παράδειγμα, η εξίσωση της καμπύλης $y^2 - x^3 - x^2 = 0$ στο προβολικό επίπεδο είναι η $Y^2Z - X^3 - X^2Z = 0$. Η αντίστροφη διαδικασία λέγεται **αποομογενοποιήση** και σε αυτή θέτουμε $Z = 1$ στο ομογενές πολυώνυμο $F(X, Y, Z)$ για να πάρουμε το $f(x, y)$, δηλαδή $f(x, y) = F(x, y, 1)$. Η αποομογενοποίηση μπορεί να γίνει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους, ανάλογα με το ποιά ευθεία έχει επιλεγεί για ευθεία στο άπειρο.

Για να βρούμε τα σημεία στο άπειρο μιας καμπύλης $f(x, y) = 0$ ομογενοποιούμε. Έτσι έχουμε την προβολική καμπύλη με εξίσωση $F(X, Y, Z) = 0$ και θέτουμε $Z = 0$. Το αποτέλεσμα είναι ένα ομογενές πολυώνυμο στις μεταβλητές X, Y. Παρατηρούμε ότι $F(x, y, 0) = M(f(x, y))$, όπου $M(f(x, y))$ είναι το ομογενές πολυώνυμο που αποτελείται από τους μεγιστοβάθμιους όρους του $f(x, y)$. Τα μηδενικά του $F(x, y, 0) = M(f(x, y))$ δίνουν τα σημεία στο άπειρο . **Αν το σώμα K είναι το σώμα των μιγαδικών αριθμών τότε το ομογενές πολυώνυμο $M(f(x, y))$ και γράφεται σαν γινόμενο γραμμικών ομογενών πολυωνύμων.**

Για παράδειγμα, για να βρούμε τα σημεία στο άπειρο της καμπύλης $V(y^2 - x^3 - x^2)$ ομογενοποιούμε και έχουμε την προβολική καμπύλη $V(Y^2Z - X^3 - X^2Z)$. Λύνουμε το σύστημα $Y^2Z - X^3 - X^2Z = 0$ και $Z = 0$ και έχουμε $X^3 = 0$, δηλαδή $X = 0$. Άρα, η καμπύλη $V(y^2 - x^3 - x^2)$ έχει στο άπειρο μόνο το σημείο $(0, 1, 0)$. Όμοια για να βρούμε τα σημεία στο άπειρο της υπερβολής $x^2 - y^2 - 1 = 0$, ομογενοποιούμε $X^2 - Y^2 - Z^2 = 0$, θέτουμε $Z = 0$ και έχουμε $X^2 - Y^2 = 0$, δηλαδή $(X - Y)(X + Y) = 0$. Άρα η υπερβολή έχει στο άπειρο τα σημεία $(1, 1, 0)$ και $(1. - 1, 0)$.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε την καμπύλη $V(y^2 - x^3 - x^2)$ στον προβολικό χώρο P^2_R. Η εξίσωσή της γίνεται $Y^2Z - X^3 - X^2Z = 0$ και αναπαριστά κώνο στον τρισδιάστατο χώρο. Η τομή του με την σφαίρα $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ δίνει την καμπύλη στο σφαιρικό μοντέλο του προβολικού επιπέδου. Τα σχήματα a, b, c δείχνουν την καμπύλη στα επίπεδα $Z = 1, Y = 1$ και $X = 1$ αντίστοιχα. Τα σχήματα d, e, f δείχνουν την καμπύλη στον προβολικό χώρο, στο μοντέλο του δίσκου, με ευθείες στο άπειρο τις $Z = 0, Y = 0$ και

$X = 0$ αντίστοιχα. Τα σημεία P, Q, R είναι τα σημεία $(0, 0, 1), (-1, 0, 1)$ και $(0, 1, 0)$ αντίστοιχα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1. Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από τα σημεία

  ι) $A = (1, 0, -1)$ και $B = (1, 1, -2)$,
  ιι) $C = (1, 0, 0)$ και $D = (3, 4, 5)$,
  ιιι) $E = (i, 1, 0)$ και $F = (1, i, 0)$.

- 2. Βρείτε το σημείο τομής των ευθειών

  ι) $X + 3Y - 2Z = 0$ και $Y + Z = 0$,
  ιι) $X + 2Y + Z = 0$ και $X + Y + Z = 0$,
  ιιι) $X - Y = 0$ και $Y - 5Z = 0$.

- 3. Βρείτε τα σημεία στο άπειρο των παρακάτω ευθειών του R^2:

  ι) $V(x - y)$,
  ιι) $V(3x + y - 1)$,
  ιιι) $V(y + 4)$.

- 4. Βρείτε τα σημεία στο άπειρο των παρακάτω καμπυλών του C^2:

  ι) $V(x^4 + 3xy - y^4)$,
  ιι) $V(x^3 - xy^2 + 2y^2)$,
  ιιι) $V((2x + y)(x - 3y)(x + y) - (x + y)x + 7(2x + y)(x - 3y))$.

- 5. Δείξτε ότι το προβολικό επίπεδο $P^2_{Z_3}$ έχει ακριβώς 13 σημεία και 13 ευθείες. Πόσα σημεία έχει κάθε ευθεία και πόσες ευθείες διέρχονται από κάθε σημείο;

- 6. Βρείτε έναν τύπο που να σας δίνει το πλήθος των σημείων του $P^n_{Z_3}$, του n-διάστατου προβολικού χώρου πάνω από το Z_3, σαν συνάρτηση του n.

- 7. Δείξτε ότι αν $f(x, y) \in C[x, y]$ είναι ομογενές πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές τότε γράφεται σαν γινόμενο γραμμικών ομογενών πολυωνύμων του $C[x, y]$.

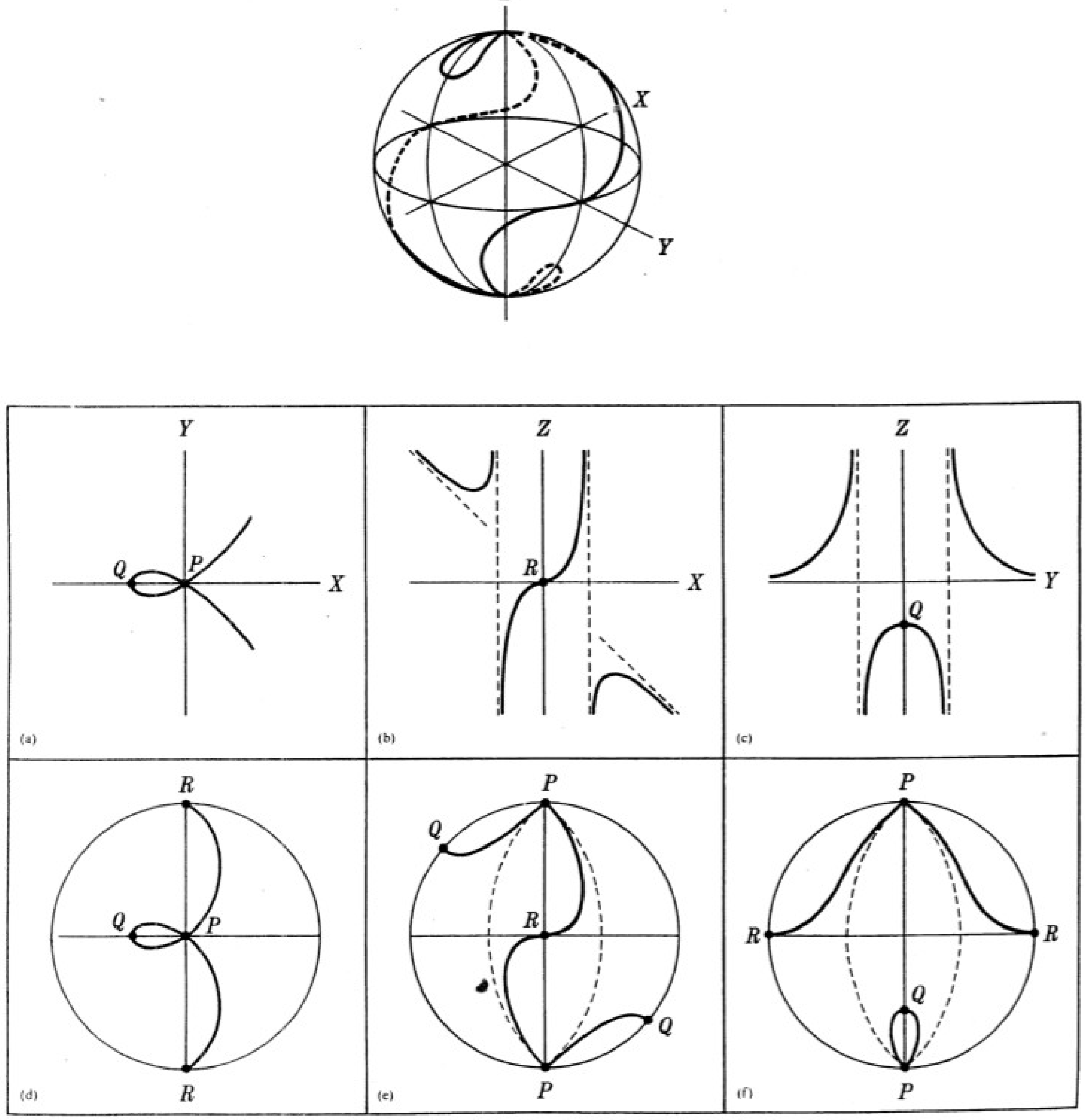
- 8. Βρείτε τα σημεία στο άπειρο των παρακάτω καμπυλών του C^2:

  ι) $V(xy(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2))$
  ιι) $V(x^4y + x^2y^3 + x^4 - y^2 + 56)$
  ιιι) $V(x^4 - y^4 - 1)$.

- 9. Αν τα σημεία $P = (a_1, b_1, c_1)$ και $Q = (a_2, b_2, c_2)$ του προβολικού επιπέδου P_K^2 είναι διαφορετικά, δείξτε ότι όλες οι προβολικές ευθείες της μορφής

$$(sa_1 + ta_2)X + (sb_1 + tb_2)Y + (sc_1 + tc_2)Z = 0$$

  όπου $s, t \in K$ και δεν είναι συγχρόνως και τα δύο μηδέν, διέρχονται από ένα συγκεκριμένο σημείο του προβολικού επιπέδου. Ποιό σημείο είναι αυτό;



Σχήμα 1: